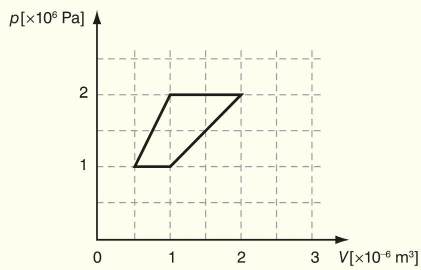
FIZYKA: przykładowe zadania maturalne poziomu rozszerzonego

Zadanie 1

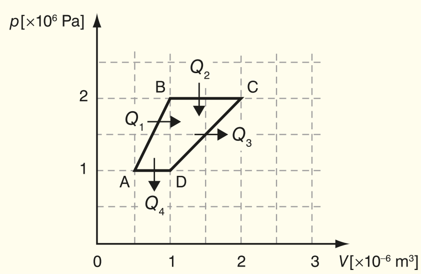
Wykres przedstawia zamknięty cykl termodynamiczny $p(V)$ wykonywany przez stałą masę gazu w silniku cieplnym. Maksymalna temperatura, jaką osiąga gaz w tym cyklu wynosi 1000 K. W ciągu 1 sekundy gaz wykonuje 10 cykli termodynamicznych. Zakładamy, że gaz jest doskonały. Masa molowa helu wynosi 4 g. Tarcie pomijamy.



A) Oblicz najniższą temperaturę osiąganą przez gaz w tym cyklu termodynamicznym.
B) Oblicz masę helu.
C) Oblicz sprawność cyklu termodynamicznego.
D) Oblicz moc silnika cieplnego.

ROZWIĄZANIE

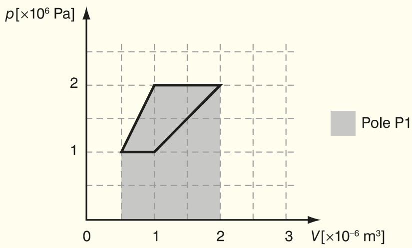
Wprowadzamy na rysunku następujące oznaczenia.



A)
Na wykresie najwyższej temperaturze T_{max} odpowiada punkt
$C=(V_2, p_2)=(2\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3, 2\cdot 10^6\ \text{Pa})$
Natomiast najniższej temperaturze T_{min} odpowiada punkt
$A=(V_{0,5}, p_1)=(0{,}5\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3, 1\cdot 10^6\ \text{Pa})$
Z równania stanu gazu doskonałego: $\frac{pV}{T}=const$
mamy $\frac{p_2V_2}{T_{max}}=\frac{p_1V_{0,5}}{T_{min}}$
skąd wyznaczymy T_{min}:
$$T_{min}=\frac{p_1V_{0,5}T_{max}}{p_2V_2}$$
Wstawiamy wartości liczbowe i otrzymujemy:
$$T_{min}=\frac{p_1V_{0,5}T_{max}}{p_2V_2}=\frac{1\cdot 10^6\ \text{Pa}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3\, 1000\ \text{K}}{2\cdot 10^6\ \text{Pa}\cdot 2\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3}=125\ \text{K}$$
Odp. Najniższa temperatura osiągana przez hel w tym cyklu termodynamicznym wynosi 125 K.

B)
Do równania Clapeyrona $pV=nRT$
wstawiamy $n=\frac{m}{\mu}$ (gdzie m – masa gazu, μ – masa molowa)
i otrzymujemy: $pV=\frac{m}{\mu}RT$
skąd szukana masa gazu wyraża się wzorem: $m=\frac{pV\mu}{RT}$
Z treści zadania wynika, że maksymalna temperatura, jaką osiąga gaz w cyklu wynosi 1000 K. Na wykresie tej temperaturze odpowiada punkt
$(V_2, p_2)=(2\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3, 2\cdot 10^6\ \text{Pa})$
Po podstawieniu tych wielkości oraz stałej gazowej
$R=8{,}31\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$
i masy molowej helu $\mu=4\ \text{g}=4\cdot 10^{-3}$ kg otrzymujemy:
$$m=\frac{p_2V_2\mu}{RT}=\frac{2\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3\cdot 2\cdot 10^6\ \text{Pa}\cdot 4\cdot 10^{-3}\frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8{,}31\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}\cdot 1000\text{K}}\simeq 0{,}0019254\ \text{kg}$$
Odp. Masa helu wynosi ok. 0,0019254 kg.

C)
Aby policzyć sprawność cyklu $\eta=\frac{W_u}{Q}$
musimy obliczyć pracę użyteczną W_u oraz ciepło Q pobrane przez gaz.
Aby obliczyć ciepło $Q=Q_1+Q_2$ pobrane przez gaz, obliczymy zmianę energii wewnętrznej gazu podczas przemiany A-B-C. Energia wewnętrzna U gazu doskonałego jest sumą energii kinetycznych wszystkich jego N cząsteczek $U=N\cdot E_{K\acute{s}r}$. Z kolei, energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczek gazu doskonałego wyraża się wzorem:
$E_{K\acute{s}r}=\frac{3}{2}kT$ (k – stała Boltzmanna).
Przyjmując $N=nN_A$ (n – liczba moli gazu, N_A – liczba Avogadro)
oraz $k=\frac{R}{N_A}$
(R – stała gazowa) otrzymujemy:
$U=\frac{3}{2}nRT$
Porównując $U=\frac{3}{2}nRT$ z równaniem Clapeyrona $pV=nRT$,
otrzymujemy wyrażenie na energię wewnętrzną gazu w zależności od ciśnienia i objętości:
$U=\frac{3}{2}pV$
Zatem zmiana energii wewnętrznej gazu podczas jego rozprężania wynosi:
$\Delta U=U_C-U_A=\frac{3}{2}(p_2V_2-p_1V_{0,5})$ [*]
Odczytujemy z wykresu odpowiednie wartości ciśnienia i objętości, tj.
$(V_1, p_1)=(0{,}5\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3, 1\cdot 10^6\ \text{Pa})$ i $(V_2, p_2)=(2\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3, 2\cdot 10^6\ \text{Pa})$
i podstawiamy do [*]:
$\Delta U=\frac{3}{2}(p_2V_2-p_1V_1)=\frac{3}{2}(4-0{,}5)=5{,}25\ [\text{J}]$
Pracę W wykonaną przez gaz podczas przemiany A-B-C obliczymy jako pole powierzchni pod częścią wykresu $p(V)$, odpowiadającą przemianom A-B-C:



Pole to możemy policzyć jako różnicę pola prostokąta i pola trójkąta.

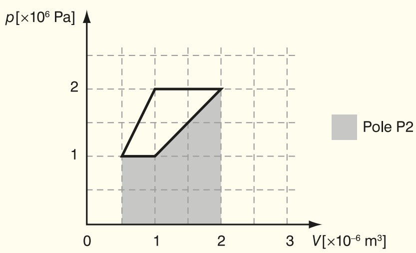
$$W = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 \cdot 2 \cdot 10^6\ \mathrm{Pa} - \frac{0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 \cdot 1 \cdot 10^6\ \mathrm{Pa}}{2} = 2{,}75\ \mathrm{J}$$

Korzystamy z I zasady termodynamiki $\Delta U = Q + W$

Pamiętając, że pracy wykonanej przez gaz przypisujemy znak ujemny, obliczamy ciepło pobrane przez gaz:

$$Q = \Delta U - W = 5{,}25\ \mathrm{J} - (-2{,}75\ \mathrm{J}) = 8\ \mathrm{J}$$

Pracę użyteczną W_u obliczymy jako różnicę odpowiednich pól powierzchni pod wykresem $p(V)$, tj. P2 – P1 (patrz rysunki)



Pole P1 już wcześniej obliczaliśmy: P1 = 2,75 [J].
Pole P2 obliczamy jako sumę prostokąta i trójkąta:

$$P2 = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^6 + \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^6}{2} = 2\,[\mathrm{J}]$$

Zatem, praca użyteczna wynosi $W_u = 2{,}75\ \mathrm{J} - 2\ \mathrm{J} = 0{,}75\ \mathrm{J}$
Ostatecznie więc, sprawność cyklu jest równa:

$$\eta = \frac{W_u}{Q} = \frac{0{,}75\ \mathrm{J}}{8} = 0{,}09375 = 9{,}375\,\%$$

Odp. Sprawność cyklu termodynamicznego wynosi 9,375%.

D)
W ciągu jednej sekundy silnik wykonuje 10 cykli. Całkowita uzyskana praca wynosi zatem:

$$W = 10 \cdot W_u = 10 \cdot 0{,}75\ \mathrm{J} = 7{,}5\ \mathrm{J}$$

Wobec tego, uzyskana moc silnika to:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{7{,}5\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{s}} = 7{,}5\ \mathrm{W}$$

Odp. Moc silnika wynosi 7,5 W.

Zadanie 2

Podczas rozpadu jednego atomu uranu ^{235}U wydziela się około 200 MeV energii. Jednym z produktów rozszczepienia jest promieniotwórczy cez ^{137}Cs o czasie połowicznego zaniku 30 lat. Klasyczna elektrownia wykorzystuje energię uwalnianą z węgla w procesie spalania. Ze spalenia jednego atomu węgla ^{12}C uzyskuje się około $6{,}5 \cdot 10^{-19}$ J energii cieplnej.

A) Porównaj ilość paliwa zużytą przez elektrownię klasyczną i jądrową w ciągu roku. Przyjmij, że obie elektrownie mają moc 1000 MW, a sprawność obu rodzajów elektrowni wynosi $\eta = 38\%$.

B) Narysuj wykres przedstawiający, jak w zależności od czasu ubywa promieniotwórczych atomów ^{137}Cs w jednym molu cezu.

C) Oblicz, ile lat musi upłynąć, aby zawartość promieniotwórczego cezu zmalała szesnastokrotnie.

ROZWIĄZANIE

Wprowadźmy oznaczenia:

E_1 – energia wydzielona podczas rozpadu jednego atomu uranu ^{235}U, wyrażona w dżulach
E_2 – energia uwolniona w procesie spalania jednego atomu węgla ^{12}C, wyrażona w dżulach
$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\mathrm{mol}}$ – liczba Avogadro (liczba atomów w 1 molu)
m_U – masa uranu zużytego w ciągu roku przez elektrownię atomową
m_C – masa węgla zużytego w ciągu roku przez elektrownię klasyczną
n_U – liczba moli uranu zawartych w masie m_U
n_C – liczba moli węgla zawartych w masie m_C
μ_U – masa molowa uranu
μ_U – masa molowa węgla
N_U – liczba atomów uranu zawartych w masie m_U
N_C – liczba atomów węgla zawartych w masie m_C

Moc elektrowni o sprawności η wyrazimy jako: $P = \eta \frac{W}{t}$

gdzie W jest to ilość energii uzyskanej podczas interesującego nas procesu w czasie t.
Z kolei, jeśli przez E_1 oznaczymy energię uzyskaną podczas rozpadu 1 atomu uranu (lub spalenia jednego atomu węgla), to

$$P = \eta \frac{W}{t} = \eta \frac{N \cdot E_1}{t}$$

Zauważmy, że

$$m_U = n_U \cdot \mu_U = \frac{N_U}{N_A} \cdot \mu_U$$

oraz

$$m_C = n_C \cdot \mu_C = \frac{N_C}{N_A} \cdot \mu_C$$

Wtedy, po prostych przekształceniach mamy:

$$N_U = \frac{N_A \cdot m_U}{\mu_U}$$

$$N_C = \frac{N_A \cdot m_C}{\mu_C}$$

Zatem moce elektrowni wyrażą się wzorami:

• elektrownia jądrowa

$$P = \eta \frac{W}{t} = \eta \frac{N_U \cdot E_1}{t} = \eta \frac{\frac{m_U}{\mu_U} N_A \cdot E_1}{t} = \frac{\eta\, m_U N_A E_1}{\mu_U\, t}$$

• elektrownia klasyczna

$$P = \eta \frac{W}{t} = \eta \frac{N_C \cdot E_1}{t} = \eta \frac{\frac{m_C}{\mu_C} N_A \cdot E_2}{t} = \frac{\eta\, m_C N_A E_2}{\mu_C\, t}$$

Z powyższych równań dostajemy wyrażenia na masy paliwa:

$$m_U = \frac{\mu_U \cdot t \cdot P}{\eta \cdot N_A \cdot E_1}$$

$$m_C = \frac{\mu_C \cdot t \cdot P}{\eta \cdot N_A \cdot E_2}$$

Porównujemy oba wyrażenia:

$$\frac{m_U}{m_C} = \frac{\frac{\mu_U t P}{\eta N_A E_1}}{\frac{\mu_C t P}{\eta N_A E_2}} = \frac{\mu_U E_2}{\mu_C E_1}$$

Podstawiamy wartości mas molowych uranu i węgla:

$\mu_U = 235u$

$\mu_C = 12u$

oraz wyrażamy energie w dżulach, tj.

$E_1 = 200\ \text{MeV} = 200 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 3{,}2 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$

$E_2 = 6{,}5 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

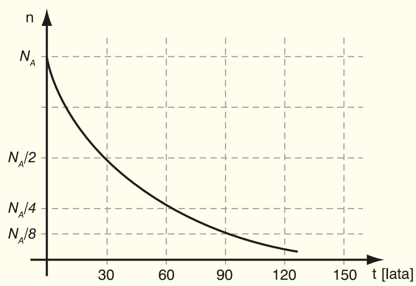
Wtedy

$$\frac{m_U}{m_C} = \frac{\mu_U E_2}{\mu_C E_1} = \frac{235u \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{12u \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-11}\ \text{J}} = 39{,}78 \cdot 10^{-8}$$

czyli $m_U = 39{,}78 \cdot 10^{-8} m_C = 3{,}978 \cdot 10^{-9} m_C$

Odp. Masa paliwa jądrowego jest około $4 \cdot 10^9$ razy mniejsza od masy paliwa klasycznego.

B)
Zgodnie z prawem rozpadu po czasie połowicznego rozpadu ubywa połowa preparatu promieniotwórczego. Czas połowicznego rozpadu dla cezu wynosi $T=30$ lat, więc na osi czasu wygodnie będzie odznaczyć wielokrotności tego czasu. W chwili początkowej ilość jąder promieniotwórczych stanowią atomy znajdujące się w jednym molu, a więc liczba Avogadro N_A cząstek. Po upływie czasu $t=T$, pozostanie $N_A/2$ atomów promieniotwórczych, po upływie czasu $t=2T$, pozostanie $N_A/4$ atomów promieniotwórczych, po czasie $t=3T$ pozostanie $N_A/8$ atomów, itd.



C)
Zakładamy, że w chwili początkowej jest N jąder promieniotwórczych. Po upływie czasu $t=T$ ilość jąder promieniotwórczych zmaleje 2-krotnie. Po upływie czasu $t=2T$ ilość jąder promieniotwórczych zmaleje 4-krotnie, itd. Zgodnie ze schematem:

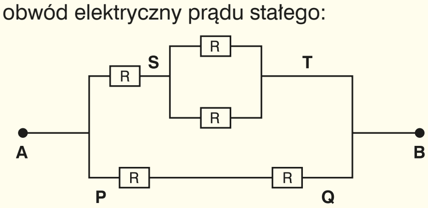
$$\boxed{N} \xrightarrow{T} \boxed{N/2} \xrightarrow{T} \boxed{N/4} \xrightarrow{T} \boxed{N/8} \xrightarrow{T} \boxed{N/16}$$

Szukany czas wynosi $t = 4T = 4 \cdot 30\ \text{lat} = 120$ lat.

Odp. Po upływie czasu 120 lat ilość jąder promieniotwórczych zmaleje szesnastokrotnie.

Zadanie 3

Dany jest obwód elektryczny prądu stałego:



Między punktami A i B jest napięcie równe 18 V. Wszystkie oporniki mają opór $R=1$

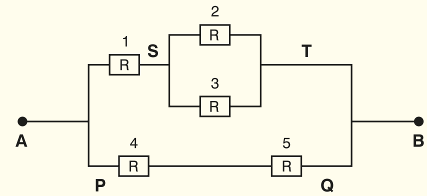
A) Oblicz natężenie prądu w górnej i dolnej gałęzi obwodu.

B) Oblicz, ile wynosiłoby natężenie prądu płynącego przez opór zastępczy.

C) Oblicz napięcie między punktami P i Q.

ROZWIĄZANIE

Wprowadźmy oznaczenia oporników tak, jak na rysunku:



Wprowadźmy również oznaczenia:

R_{ij} – opór oporu zastępczego odpowiadającego oporom R_i i R_j

U_{IJ} – napięcie między punktami I oraz J

I_g – natężenie prądu w gałęzi górnej

I_d – natężenie prądu w gałęzi dolnej

Pamiętamy, że w przypadku łączenia szeregowego oporów R_i i R_j, opór zastępczy wynosi:

$R_{ij} = R_i + R_j$

natomiast w przypadku łączenia równoległego mamy:

$$\frac{1}{R_{ij}} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}$$

W przedstawionym obwodzie opory R_2 i R_3 połączone są równolegle. Wobec tego

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Korzystając z warunku zadania $R=1\,\Omega$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1\ \Omega} + \frac{1}{1\ \Omega} = 2\frac{1}{\Omega}$$

stąd

$$R_{23} = \frac{1}{2}\ \Omega$$

Opory $R_1 = 1\,\Omega$ i $R_{23} = \frac{1}{2}\ \Omega$ połączone są szeregowo, więc

$$R_{123} = 1\ \Omega + \frac{1}{2}\ \Omega = \frac{3}{2}\ \Omega$$

Czyli natężenie prądu w gałęzi górnej obwodu wynosi:

$$I_g = \frac{U_{AB}}{R_{123}} = \frac{18\ \text{V}}{\frac{3}{2}\ \Omega} = 12\ \text{A}$$

W analogiczny sposób obliczamy natężenie w dolnej gałęzi obwodu.

$$I_d = \frac{U_{AB}}{R_{45}}$$

gdzie

U_{AB} – napięcie między punktami A,

R_{45} – opór zastępczy odpowiadający oporom R_4 i R_5.

W przedstawionym obwodzie opory R_4 i R_5 połączone są szeregowo. Wobec tego

$R_{45} = R_4 + R_5 = 1\,\Omega + 1\,\Omega = 2\,\Omega$

Czyli natężenie prądu w dolnej gałęzi obwodu wynosi:

$$I_d = \frac{U_{AB}}{R_{45}} = \frac{18\ \text{V}}{2\ \Omega} = 9\ \text{A}$$

Odpowiedź: W górnej gałęzi obwodu płynie prąd o natężeniu 12 A, a w dolnej płynie prąd o natężeniu 9 A.

B)
Natężenie prądu płynącego przez opór zastępczy dla całego obwodu obliczymy korzystając z prawa Ohma, tzn.

$$I = \frac{U_{AB}}{R_{zast}}$$

gdzie

U_{AB} – napięcie między punktami A i B
R_{zast} – opór zastępczego dla całego obwodu.

Wykorzystamy obliczenia wykonane w punkcie A), tj.

$$R_{123} = \frac{3}{2}\ \Omega$$

$$R_{45} = 2\ \Omega$$

W przedstawionym obwodzie opory zastępcze R_{123} i R_{45} połączone są równolegle. Wobec tego

$$\frac{1}{R_{zast}} = \frac{1}{R_{123}} + \frac{1}{R_{45}}$$

Korzystając z warunku zadania $R = 1\ \Omega$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{R_{zast}} = \frac{1}{\frac{3}{2}\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega} = \frac{2}{3\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega} = \frac{4}{6\ \Omega} + \frac{3}{6\ \Omega} = \frac{7}{6\ \Omega}$$

stąd

$$R_{zast} = \frac{6}{7}\ \Omega$$

Ostatecznie, natężenie prądu płynącego przez opór zastępczy dla całego obwodu wynosi

$$I = \frac{U_{AB}}{R_{zast}} = \frac{18\ \text{V}}{\frac{6}{7}\ \Omega} = 21\ \text{A}$$

Odpowiedź: Przez opór zastępczy płynie prąd o natężeniu 21 A.

C)
Napięcie między punktami P i Q jest oczywiście takie samo jak między punktami A i B.
Możemy to także obliczyć korzystając z prawa Ohma, tzn.

$$I_d = \frac{U_{PQ}}{R_{45}}$$

skąd szukane napięcie:

$$U_{PQ} = I_d \cdot R_{45}$$

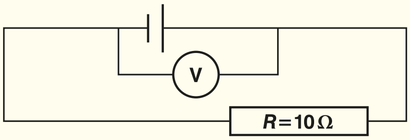
Korzystając z obliczeń wykonanych w punkcie A), otrzymujemy:

$$U_{PQ} = I_d \cdot R_{45} = 9\,\text{A} \cdot 2\,\Omega = 18\,\text{V}$$

Odpowiedź: Napięcie między punktami P i Q wynosi 18 V.

Zadanie 4

Źródło o SEM równej $\varepsilon = 12\,\text{V}$ włączono do obwodu pokazanego na rysunku i stwierdzono, że woltomierz wskazuje napięcie $U = 10\,\text{V}$.



A) Oblicz opór wewnętrzny źródła
B) Udowodnij, że stosunek oporu wewnętrznego do oporu zewnętrznego wynosi 1:5.
C) Oblicz, jaka jest moc wydzielana na oporze zewnętrznym.

ROZWIĄZANIE

Wprowadzamy oznaczenia:
r – opór wewnętrzny źródła SEM
R – opór zewnętrzny
U' – spadek napięcia na oporze wewnętrznym r
I – natężenie prądu w obwodzie

A)
I sposób
Z prawa Ohma wynika, że prąd w obwodzie ma natężenie równe:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10\ \text{V}}{10\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

Z warunków zadania wynika, że po włączeniu źródła $\varepsilon = 12\,\text{V}$ woltomierz wskazywał $U = 10\,\text{V}$, a zatem nastąpił spadek napięcia na oporze wewnętrznym r źródła równy $U' = 2\,\text{V}$.
Wykorzystując ponownie prawo Ohma, obliczymy szukany opór wewnętrzny źródła r:

$$I = \frac{U'}{r}$$

skąd

$$r = \frac{U'}{I} = \frac{2\ \text{V}}{1\ \text{A}} = 2\ \Omega$$

II sposób
Korzystamy z tzw. prawa Ohma dla całego obwodu:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

skąd wyznaczamy opór wewnętrzny r:

$$I(R + r) = \varepsilon$$

$$IR + Ir = \varepsilon$$

$$Ir = \varepsilon - IR$$

$$r = \frac{\varepsilon}{I} - R$$

Z prawa Ohma wynika, że prąd w obwodzie ma natężenie równe:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10\ \text{V}}{10\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

a zatem

$$r = \frac{\varepsilon}{I} - R = \frac{12\ \text{V}}{1\ \text{A}} - 10\ \Omega = 12\ \Omega - 10\ \Omega = 2\ \Omega$$

Odpowiedź: Opór wewnętrzny źródła SEM wynosi 2 Ω.

B)
Mając obliczony opór wewnętrzny źródła $r = 2\,\Omega$ i podany w zadaniu opór zewnętrzny $R = 10\,\Omega$, natychmiast udowadniamy, że ich stosunek jest jak 1:5, tj.

$$\frac{r}{R} = \frac{2\ \Omega}{10\ \Omega} = \frac{1}{5}$$

C)
Moc wydzieloną na oporze zewnętrznym obliczymy korzystając ze wzoru na moc prądu $P = U \cdot I$ oraz z obliczonej w punkcie A) wartości natężania I prądu w obwodzie.
A zatem $P = U \cdot I = 10\,\text{V} \cdot 1\,\text{A} = 10\,\text{W}$.
Odpowiedź: Moc wydzielona na oporze zewnętrznym wynosi 10 W.

Zadania maturalne opracowała: Małgorzata Olędzka, egzaminator, nauczyciel fizyki w X LO w Białymstoku

Punktacja

zadanie	ZADANIE 1				ZADANIE 2			ZADANIE 3			ZADANIE 4		
	A	B	C	D	A	B	C	A	B	C	A	B	C
punkty	3	3	7	2	5	2	1	5	3	2	2	1	2