MATEMATYKA: przykładowe zadania maturalne poziomu rozszerzonego

Zadanie 1

Wykres funkcji $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x-6}$ przesunięto o wektor [–2,1], a następnie przesunięty wykres przekształcamy przez symetrię względem początku układu współrzędnych. Znajdź wzór funkcji g i wyznacz jej dziedzinę.

ROZWIĄZANIE:
Przesuwając wykres funkcji o wektor mamy f(x – p)+q, zatem:

$$f(x)=\frac{x+2-3}{(x+2)^2-(x+2)-6}+1=\frac{x-1}{x^2+4x+4-x-2-6}+1=$$
$$=\frac{x-1}{x^2+3x-4}+1=\frac{x-1+x^2+3x-4}{x^2+3x-4}+1=\frac{x^2+4x-5}{x^2+3x-4}$$

przekształcamy przez symetrię :

$$f(-x)=\frac{x^2-4x-5}{x^2-3x-4} \qquad -f(-x)=\frac{-x^2+4x+5}{x^2-3x-4}$$

zatem:

$$g(x)=\frac{-x^2+4x+5}{x^2-3x-4}$$

ustalamy dziedzinę funkcji g:
mianownik musi być różny od zera

$$x^2-3x-4=0 \qquad \Delta=9-4(-4)=25$$
$$\sqrt{\Delta}=5 \quad x_1=\frac{3-5}{2}=-1 \quad x_2=\frac{3+5}{2}=4$$

Odpowiedź: Dziedziną funkcji g jest zbiór: R- {–1,4}

Zadanie 2

Tomek hoduje rybki akwariowe. Rok temu rybki żyworodne stanowiły 20% liczby wszystkich rybek w akwarium Tomka. Obecnie liczba rybek żyworodnych jest o 50% większa, a liczba rybek jajorodnych zwiększyła się o 18,75%. Jaki odsetek stanowią obecnie rybki żyworodne?

ROZWIĄZANIE:
Wprowadzamy oznaczenia:
x – ilość wszystkich rybek w akwarium
0,2x – ilość rybek żyworodnych
0,8x – ilość rybek jajorodnych

po zmianie:
ilość rybek żyworodnych =0,2x + 0,5•0,2x = 0,2x + 0,1x = 0,3x
ilość rybek jajo rodnych =0,8x + 0,1875•0,8 x = 0,8x + 0,15 = 0,95x

obliczamy odsetek rybek żyworodnych:

$$\frac{0,3x}{(0,95+0,3)x}\bullet 100\%=\frac{0,3}{1,25}\bullet 100\%=24\%$$

Odpowiedź: Odsetek rybek żyworodnych obecnie wynosi 24%.

Zadanie 3

Wyznacz zbiór $A'\cap B$ jeżeli

$$A=\{m\in R;\ \frac{2m^2-5}{m^2-4}\geq 1\}\ i\ B=\{m\in R;\ m^3+8\leq 2m^2+4m\}$$
$$A=\{m\in R;\ \frac{2m^2-5}{m^2-4}\geq 1\};\ m\neq 2m\ \ i\ m\neq -2$$

Rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{2m^2-5}{m^2-4}\geq 1$$
$$\frac{2m^2-5-m^2+4}{m^2-4}\geq 1$$
$$\frac{m^2-1}{m^2-4}\geq 0 \qquad \frac{(m-1)(m+1)}{(m-2)(m+2)}\geq 0$$

	(–∞;–2)	–2	(–2;–1)	–1	(–1;1)	1	(1;2)	2	(2;+∞)
m–1	–	–	–	–	–	0	+	+	+
m+1	–	–	–	0	+	+	+	+	+
m–2	–	–	–	–	–	–	–	0	+
m+2	–	0	+	+	+	+	+	+	+
	+	0	–	0	+	0	–	0	+

$$A=(-\infty;-2)\cup<-1;1>\cup(2;\infty)$$
$$czyli\ A'=<-2;-1)\cup(1;2>$$
$$B=\{m\in R;\ m^3+8\leq 2m^2+4m\}$$

Rozwiązujemy nierówność:

$$m^3+8\leq 2m^2+4m$$
$$m^3-2m^2-4+8\leq 0$$
$$m^2(m-2)-4(m-2)\leq 0$$
$$(m^2-4)(m-2)\leq 0$$
$$(m-2)(m+2)(m-2)\leq 0$$

	(–∞;–2)	–2	(–2;2)	2	(2;+∞)
m+2	–	0	+	+	+
m – 2	–	–	–	0	+
m – 2	–	–	–	0	+
	–	0	+	0	+

$$B=(-\infty;-2>\cup\{2\}$$
$$A'\cap B=\{-2;2\}$$

Odpowiedź: $A'\cap B=\{-2;2\}$

Zadanie 4

Boki trójkąta zawierają się w prostych: x – y=0, x + y – 4 = 0, x – 3y = 0. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu tego trójkąta dookoła najdłuższego boku.

ROZWIĄZANIE:
Szukamy współrzędnych wierzchołków trójkąta rozwiązując układy równań złożone z równań prostych zawierających boki trójkąta:

I.

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$$

II.

$$\begin{cases} x-y=0\,/\,(-1) \\ x-3y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

……………….......... ………………..........

2x – 4=0
2x= 4   2 – y = 0
x = 2   y = 2
A = (2;2)

–2y = 0
y = 0
x = 0
B = (0;0)

III.

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 3-3y=0 \end{cases}$$

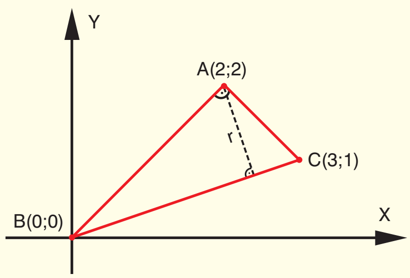
$$\begin{cases} -x-y+4=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

………………..........

–4y=–4   x+1–4=0

y=1   x=3

C=(3;1)



Obliczamy długości boków trójkąta ABC korzystając ze wzoru na długość odcinka

$$/BC/=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$
$$/AB/=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$$
$$/AC/=\sqrt{(3-2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$$

Sprawdzamy, czy trójkąt ABC jest prostokątny:

$$\left(\sqrt{10}\right)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$

10=10 zatem na podstawie twierdzenia odwrotnego do tw. Pitagorasa trójkąt jest prostokątny.

W wyniku obrotu tego trójkąta wzdłuż najdłuższego boku otrzymamy dwa stożki złączone podstawami. Ich promieniem będzie wysokość trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną. Jej długość obliczymy korzystając z pola trójkąta ABC.

$$P=\frac{1}{2}/AB/\bullet/AC/=\frac{1}{2}\sqrt{8}\bullet\sqrt{2}=2$$
$$P=\frac{1}{2}/BC/\bullet r$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{10}\bullet r=2$$
$$r=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

bok /BC/ jest sumą wysokości obu stożków. Liczymy wysokość każdego stożka, korzystając z tw. Pitagorasa:

$$h_1^2+r^2=AC^2$$

$$h_1^2+\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2=\sqrt{2}^2$$
$$h_1^2=2-\frac{4\bullet 10}{25}=2-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$$
$$h_1=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$
$$h_2=\sqrt{10}-h_1=\sqrt{10}-\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

Objętość bryły jest równa sumie objętości obu stożków:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2\bullet\frac{\sqrt{10}}{5}+\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2\bullet\frac{4\sqrt{10}}{5}=\frac{8\sqrt{10}}{75}\pi+\frac{32\sqrt{10}}{75}\pi$$
$$=\frac{40\sqrt{10}}{75}\pi=\frac{8\sqrt{10}}{15}\pi\left(j^3\right)$$

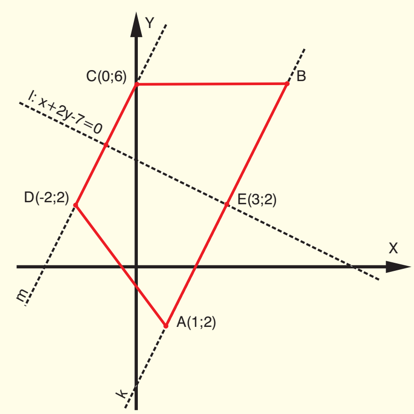
Odpowiedź: Objętość powstałej bryły wynosi $\frac{8\sqrt{10}}{15}\pi\left(j^3\right)$.

Zadanie 5

Punkty A=(1,–2), D=(–2,2) są kolejnymi wierzchołkami trapezu ABCD. Prosta x+2y – 7=0 jest osią symetrii tego trapezu. Znajdź pozostałe wierzchołki trapezu.

ROZWIĄZANIE:

Prosta l: x+2y – 7=0 jest osią symetrii trapezu. Proste zawierające boki trapezu są więc prostopadłe do prostej l. Szukamy równania prostej k zawierającej bok AB, jest to prosta prostopadła do l i zawierająca punkt A.



$$l: x+2y-7=0$$
$$2y=-x+7$$
$$l: y=-\frac{1}{2}x+3{,}5$$

warunek prostopadłości prostych: $a_1 \bullet a_2 = -1$

$$-\frac{1}{2}a_2=-1 \text{ zatem } a_2=2$$

prosta $k: y=2x+b$ aby znaleźć współczynnik b podstawiamy współrzędne punku A:

$y=2x+b$ $-2=2+b$ $b=-4$

$$k: y=2x-4$$

szukamy punktu wspólnego prostych k i l :

$$\begin{cases} -y=-2x+4 \\ y=-\frac{1}{2}x+3{,}5 \end{cases}$$

$$0=-2{,}5x+7$$

$x=3;\ y=2$ $S=(3;2)$

Wierzchołek B leży po drugiej stronie prostej l. Punkt S jest środkiem odcinka AB. Korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka obliczamy współrzędne wierzchołka B trapezu.

$B=(x,y)$

$\left(\frac{1+x}{2};\frac{-2+y}{2}\right)=(3;2)$

$\frac{1+x}{2}=3 \qquad \frac{-2+y}{2}=2$

$x=5 \qquad y=6 \qquad B=(5;6)$

W analogiczny sposób obliczamy współrzędne wierzchołka C. Leży on na prostej m równoległej do prostej k oraz po drugiej stronie prostej l. Proste równoległe mają ten sam współczynnik kierunkowy

$m: y=2x+b \qquad D=(-2;2)$

$2=2(-2)+b$

$b=6 \qquad m: y=2x+6$

szukamy współrzędnych punktu przecięcia się prostych m i l;

$\begin{cases} y=2x+6 \\ y=-\frac{1}{2}x+3,5 \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x+6 \\ -y=\frac{1}{2}x-3,5 \end{cases}$

$0=2,5+2,5$

$x=-1 \qquad y=4 \qquad P=(-1;4)$

Punkt P jest środkiem odcinka CD.

$C=(x;y)$

$\left(\frac{-2+x}{2};\frac{2+y}{2}\right)=(-1;4)$

$\frac{-2+x}{2}=-1 \qquad \frac{2+y}{2}=4$

$x=0 \qquad y=6 \qquad C=(0;6)$

Odpowiedź: Współrzędne szukanych wierzchołków trapezu wynoszą: B = (5; 6) i C = (0 ;6).

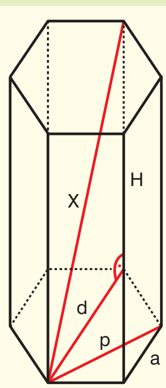
Zadanie 6

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a. Najdłuższa przekątna graniastosłupa jest cztery razy dłuższa od najkrótszej przekątnej podstawy. Oblicz objętość graniastosłupa.

ROZWIĄZANIE:

Wprowadzamy oznaczenia:

a – dana krawędź podstawy
p – krótsza przekątna podstawy
d – dłuższa przekątna podstawy
x – najdłuższa przekątna graniastosłupa
H – wysokość graniastosłupa



Wiemy, że:

$p=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$

$x=4p=4a\sqrt{3}$

Obliczamy H korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$x^2=d^2+H^2$

$H^2=x^2-d^2=\left(4a\sqrt{3}\right)^2-(2a)^2=16a^2 3-4a^2=44a^2$

$H=2\sqrt{11}a$

Obliczamy objętość:

$V=P_p \bullet H=\frac{6a^2}{4}\sqrt{3}\bullet 2\sqrt{11}a=3\sqrt{33}a^3\ (j^3)$

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $3\sqrt{33}a^3\ (j^3)$.

Zadanie 7

Janek wygrywa w szachy z Kasią z prawdopodobieństwem 0,9 a z Jurkiem z prawdopodobieństwem 0,3. Z kim powinien rozegrać pierwszą partię, aby mieć większą szansę wygrania dwóch kolejnych partii, jeżeli gra składa się z trzech partii i kolejne partie rozgrywa na przemian z Kasią i Jurkiem?

ROZWIĄZANIE:

Wprowadzamy oznaczenia:

W_k – wygrana z Kasią $\qquad W_j$ – wygrana z Jurkiem
P_k – przegrana z Kasią $\qquad P_j$ – przegrana z Jurkiem

Zdarzenie A – Janek wygrywa co najmniej dwie kolejne partie rozpoczynając grę od partii z Kasią

Zatem:

A = $\{(W_k, W_j, W_k);(W_k, W_j, P_k);(P_k, W_j, W_k)\}$

Obliczamy prawdopodobieństwo:

P($\{W_k, W_j, W_k\}$) = 0,9 • 0,3 • 0,9 = 0,243
P($\{W_k, W_j, P_k\}$) = 0,9 • 0,3 • 0,1 = 0,027
P($\{P_k, W_j, W_k\}$) = 0,1 • 0,3 • 0,9 = 0,027

Tak więc:

P(A) = 0,243 + 0,027 + 0,027 = 0,297

Zdarzenie B – Janek wygrywa co najmniej dwie kolejne partie rozpoczynając grę od partii z Jurkiem

B = $\{(W_j, W_k, W_j);(W_j, W_k, P_j);(P_j, W_k, W_J)\}$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B:

P($\{W_j, W_k, W_j\}$) = 0,3 • 0,9 • 0,3 = 0,081
P($\{W_j, W_k, P_j\}$) = 0,3 • 0,9 • 0,7 = 0,189
P($\{P_j, W_k, W_j\}$) = 0,7 • 0,9 • 0,3 = 0,189

Zatem :

P(B) = 0,081 + 0,189 + 0,189 = 0,459

Tak więc: **P(B) > P(A)**

Odpowiedź: Janek powinien rozpocząć grę od partii z Jurkiem.

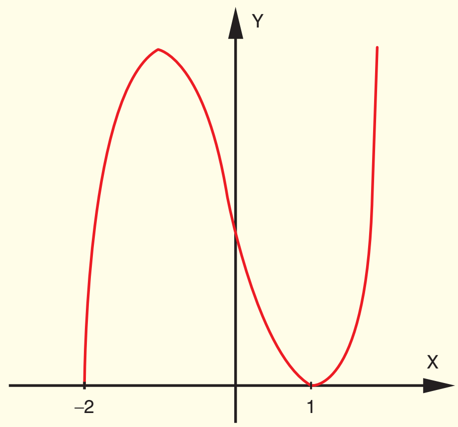
Zadanie 8

Dany jest wielomian stopnia trzeciego W(x). Rysunek przedstawia wykres tej funkcji wielomianowej. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby (-2) oraz 1, a pochodna W'(-2) = 18.

a) Wyznacz wzór tego wielomianu.
b) Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu tego wielomianu w punkcie o odciętej x=3.

ROZWIĄZANIE:

Ad. a) Miejsca zerowe to x = –2 i x = 1,



więc W(x) = a(x+2)(x – 1)^2, a≠0

Obliczamy pochodną:
W'(x)=a(x – 1)^2 + 2a(x – 1)(x+2)

Obliczamy W'(–2) = a(–2 – 1)^2+2a(–2 – 1)(–2+2)
a•(–3)^2 = 9a

Z warunków zadania wiemy, że W'(–2) = 18, więc:
9a = 19, to a = 2

W(x) = 2(x+2)(x – 1)^2 = (2x+4)(x^2 – 2x+1) =
= 2x^3 – 4x^2 + 2x + 4x^2 – 8x +4 = 2x^3 – 6x +4

Tak więc : W(x) = 2x^3 – 6x +4

Ad. b) Obliczamy wartość wielomianu i pochodnej w punkcie styczności:
W(3) = 2 • 3^3 – 6 • 3 + 4 = 40
W'(3) = 2(3 – 1)^2 + 2 • 2(3 – 1)(3+2) = 8+40 = 48

Równanie stycznej: y – y(x$_0$) = y(x$_0$)(x – x$_0$)

Punkt styczności (3;40)
y – 40 = 48(x–3)
y = 48x – 144+40
y=48x – 104

Odpowiedź: Styczna do wykresu wielomianu ma równanie:
y = 48x – 104

Zadanie 9.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite dla których funkcja

$f(x) = x^2 - 2^k x + 2^k + \frac{5}{4}$ przyjmuje wartości dodatnie.

ROZWIĄZANIE:

Współczynnik a funkcji jest dodatni, zatem funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla Δ < 0.

Obliczamy Δ:

$$\Delta = \left(2^k\right)^2 - 4 \bullet 1 \bullet \left(2^k + \frac{5}{4}\right) = 2^{2k} - 4 \bullet 2^k - 5$$

podstawiamy x=2^k i x>0

$x^2 - 4x - 5 < 0$

$\Delta = 16 + 4 \bullet 5 = 36$ $\qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

$x_1 = \frac{4-6}{2} = -1$ $\qquad x_2 = \frac{4+6}{2}$

Tak więc:

$x \in (-1;5)$

Stąd:

$0 < 2^k < 5$

czyli:

$x \in C,\ k \leq 2$

Odp: Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich liczb całkowitych mniejszych od 3.

Zadanie 10

Rozwiąż równanie:

$$\frac{1}{\sin\alpha} + ctg\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0$$

ROZWIĄZANIE:

Korzystamy ze wzoru:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -sin\alpha$$

stąd:

$$\frac{1}{\sin\alpha} + ctg\alpha - \sin\alpha = -\sin\alpha$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha = 0$$

$$\frac{1 + \cos\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} = 0$$

mnożymy obie strony równania przez sin α

$1 + \cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$

korzystamy ze wzoru:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$\cos^2\alpha + \cos\alpha = 0$

$\cos\alpha(\cos\alpha + 1) = 0$

$\cos\alpha = 0$ lub $\cos\alpha + 1 = 0$

Stąd:

$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$

Zatem:

$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in C$

Odp: Rozwiązaniem równania są kąty $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in C$.

Zadania maturalne opracowała: Jadwiga Biedrycka,
egzaminator, wykładowca Akademii Sukcesu www.as.edu.pl.