MATEMATYKA: przykładowe zadania maturalne poziomu podstawowego z rozwiązaniami

A. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi (za 2 punkty)

Zadanie 1

Dane są liczby $a=(2^{-1})^4\sqrt{16}$, $b=20$. Jakim procentem liczby *a* jest liczba *b*?

ROZWIĄZANIE:

Liczymy wartość liczby a korzystając ze wzoru na potęgowanie potęgi tj. $(a^m)^n=a^{mn}$, zatem:

$$a=2^{-1\cdot 4}\sqrt{16}=2^{-4}\cdot 4=\frac{1}{16}\cdot 4=\frac{1}{4}$$

Obliczamy jakim procentem liczby *a* jest liczba *b*. Najpierw tworzymy ułamek, gdzie w mianowniku piszemy „jakiej liczby", a w liczniku „jaka liczba" i zamieniamy na procent mnożąc przez 100%.

$$\frac{b}{a}\cdot 100\%=\frac{20}{\frac{1}{4}}\cdot 100\%=80\cdot 100\%=8000\%$$

Odpowiedź: Liczba *b* stanowi 8000% liczby *a*.

Zadanie 2

Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 4.

ROZWIĄZANIE:

Aby wykazać, że liczba jest podzielna przez cztery należy zapisać ją w postaci iloczynu liczby 4 przez inną liczbę.
Kolejne liczby naturalne parzyste zapiszemy jako: $2n$; $2n+2$; $2n+4$. Wyrażenia z zadania ma więc postać:

$$(2n)^2+(2n+2)^2+(2n+4)^2=4n^2+4n^2+8n+4+4n^2+16n+16=$$

Wykorzystaliśmy wzór skróconego mnożenia $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Należy teraz dokonać redukcji wyrazów podobnych i wyłączyć 4 przed nawias:

$$=12n^2+24n+20=4(3n^2+6n+5)$$

Zatem liczba utworzona z kwadratów kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 4.

Zadanie 3

Wyznacz wartość liczby *m* tak, aby funkcja $f(x)=(m^2-7m)x+5m$ miała dokladnie jedno miejsce zerowe $x=-1$.

ROZWIĄZANIE;

Miejscem zerowym funkcji nazywamy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0. Jeżeli miejscem zerowym ma być -1, to dla takiego *x* funkcja ma mieć wartość 0. Podstawiamy zatem do wzoru funkcji za *x* liczbę -1, a za *f(x)* liczbę 0 i rozwiązujemy otrzymane równanie.

$f(x)=(m^2-7m)x+5m$

$(m^2-7m)\cdot(-1)+5m=0$

$-m^2+7m+5m=0$

$-m^2+12m=0 \qquad m(-m+12)=0$

$m=0$ to rozwiązanie nie spełnia warunków zadania, (wyzeruje cały wzór funkcji)

$-m+12=0 \qquad -m=-12\ /:(-1) \qquad m=12$

Odpowiedź: Dla $m=12$ funkcja ma jedno miejsce zerowe $x=-1$.

Zadanie 4

Dla jakich wartości *x* liczby $2x$, x^2, 24 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny?

ROZWIĄZANIE:

Jeżeli liczby tworzą ciąg arytmetyczny to wyraz środkowy ciągu jest średnią arytmetyczną wyrazów skrajnych. Zatem:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

$$x^2=\frac{2x+24}{2}\ /\cdot 2$$

$$2x^2=2x+24\ /:2$$

$$x^2-x-12=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\sqrt{\Delta}=7$$

$$\Delta=1+48=49$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-7}{2}=-3 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+7}{2}=4$$

Odpowiedź: Podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny dla $x=-3$ i $x=4$.

Zadanie 5

Drzewo rzuca cień o długości 10 m. Oblicz wysokość drzewa wiedząc, że promienie słoneczne padają na Ziemię pod kątem 60°. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.

ROZWIĄZANIE:

Drzewo z cieniem tworzy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych – wysokość drzewa: *x*, cień drzewa: 10 m.

$$\text{tg } 60^\circ=\frac{\text{wysokość drzewa}}{\text{długość drzewa}}=\frac{x}{10}$$

$$\text{tg } 60^\circ=\sqrt{3}\approx 1{,}732$$

$$\frac{x}{10m}=1{,}732$$

$$x=1{,}732\cdot 10\ \text{m}=17{,}32\ \text{m}=17\ \text{m}\ 32\ \text{cm}$$

Odpowiedź: Wysokość drzewa wynosi 17 m 32 cm.

Zadanie 6

Pewną pracę można wykonać w ciągu 18 godzin, włączając do pracy 25 maszyn o tej samej wydajności. Ile wystarczy włączyć takich samych maszyn, żeby wykonać tę samą pracę w ciągu 30 godzin?

ROZWIĄZANIE:

18 godzin pracy ----------- 25 maszyn
30 godzin pracy ---------- *x* maszyn

Są to wielkości odwrotnie proporcjonalne – więcej godzin pracy to mniej maszyn. Układamy proporcję:

$$\frac{x}{25}=\frac{18}{30}$$

$$30x=25\cdot 18$$

$$30x=450/:30$$

$$x=15$$

Odpowiedź: Trzeba włączyć 15 maszyn.

B. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi (za 5-6 punktów)

Zadanie 1

Z miejscowości *A* do miejscowości *B* odległej od *A* o 160 km wyruszyły samochód osobowy i rowerzysta. Prędkość rowerzysty jest o 50 km/h mniejsza od prędkości samochodu. Czas przejazdu samochodu jest o 3 godziny i 20 minut krótszy od czasu przejazdu rowerzysty. Oblicz średnie prędkości samochodu i rowerzysty.

ROZWIĄZANIE;

Wprowadzamy oznaczenia:

v – prędkość samochodu

v – 50 prędkość rowerzysty

x – czas jazdy samochodu

$x+3\frac{1}{3}$ – czas jazdy rowerzysty,

160 – droga samochodu i rowerzysty

Zapisujemy układ równań:

$$v=\frac{160}{x}$$

$$v-50=\frac{160}{x+3\frac{1}{3}}$$

podstawiamy do drugiego równania wartość v z pierwszego i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$\frac{160}{x}-50=\frac{160}{x+3\frac{1}{3}}$$

(lewą stronę sprowadzamy do wspólnego mianownika i korzystamy

$$\frac{160-50x}{x}=\frac{160}{x+3\frac{1}{3}}$$

z własności proporcji („mnożymy na krzyż")

$$160x+\frac{1600}{3}-50x^2-\frac{500}{3}x=160x \ /\cdot 3$$

$$150x^2-500x+1600=0 \ /:50$$

$$-3x^2-10x+32=0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, do rozwiązania którego wykorzystamy następujące wzory:

$$\Delta=b^2-4ac;\ x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ :\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Podstawiamy do podanych wzorów:

$$\Delta=10\cdot 10+4\cdot 3\cdot 32=100+384=484$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{484}=22$$

$$x_1=\frac{10-22}{2\cdot(-3)}=\frac{-12}{-6}=2$$

$$x_1=\frac{10+22}{2\cdot(-3)}=\frac{32}{-6}=-5\frac{1}{3}$$

nie spełnia warunków zadania, czas nie może być ujemny

Czas jazdy samochodu to 2 godziny, zatem jego prędkość $v=160\text{ km}:2\text{ h}=80\text{ km/h}$

Prędkość rowerzysty $v-50=80\text{ km/h}-50\text{ km/h}=30\text{ km/h}$

Odpowiedź: Średnia prędkość samochodu wynosi 80 km/h, średnia prędkość rowerzysty to 30 km/h.

Zadanie 2

Tworząca stożka jest o 2 dłuższa od promienia jego podstawy. Pole powierzchni bocznej stożka jest równe 120π. Wyznacz objętość stożka.

ROZWIĄZANIE:

Wprowadzamy oznaczenia:

r – promień podstawy stożka

l – tworząca stożka; $l=2+r$

P_{pb} – pole powierzchni bocznej stożka; $P_{pb}=120\pi$
Do wzoru na pole powierzchni bocznej stożka $P_{pb}=\pi rl$ podstawiamy dane z zadania i obliczamy r:

$$\pi rl=120\pi$$

$$\pi r(r+2)=120\pi$$

$$\pi r^2+2\pi r=120\pi \ /:\pi$$

$$r^2+2r-120=0$$

Obliczamy deltę i pierwiastki równania kwadratowego:

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-a\cdot 1\cdot 120=484 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{484}=22$$

$$r_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-22}{2}=-12$$

nie spełnia warunków zadania, promień nie może być ujemny

$$r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+22}{2} = 10$$

Promień stożka wynosi 10, korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość stożka h

$l = 10 + 2 = 12$ $\qquad r^2 + h^2 = l^2$

$10^2 + h^2 = 12^2$

$h_2 = 144 - 100 = 44$ $\qquad h = \sqrt{44} = \sqrt{4 \bullet 11} = 2\sqrt{11}$

Podstawiamy do wzoru na objętość stożka: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$V = \frac{1}{3}\pi 10^2 2\sqrt{11} = \frac{200}{3}\sqrt{11}\pi$$

Odpowiedź: Objętość stożka wynosi $\frac{200}{3}\sqrt{11}\pi$.

Zadanie 3

W pudełku mamy 18 kul w trzech kolorach: białe, czarne i niebieskie w stosunku 2: 3: 4. Losujemy 2 kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych. Wyniki przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

ROZWIĄZANIE:

Obliczamy najpierw ilość kul poszczególnych kolorów:

$2 + 3 + 4 = 9 \qquad 18:9 = 2$

kul białych $= 2 \bullet 2 = 4$

kul czarnych $= 2 \bullet 3 = 6$

kul niebieskich $= 2 \bullet 4 = 8$

obliczamy ilość wszystkich zdarzeń: losowanie 2 elementowego ze zbioru 18 elementowego:

$$\Omega = C_{18}^2 = \frac{18!}{2!(18-2)!} = \frac{18!}{2! \bullet 16!} = \frac{17 \bullet 18}{2} = 153$$

obliczamy ilość zdarzeń sprzyjających: losowanie 2 kul z 6 kul czarnych:

$$A = C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{5 \bullet 6}{2} = 15$$

obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych dzieląc ilość zdarzeń sprzyjających przez ilość wszystkich zdarzeń:

$$P(A) = \frac{15}{153} = \frac{5}{51}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych wynosi 551.

Zadanie 4

Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{4}$, oblicz: $\sin\alpha \bullet \cos\alpha$

ROZWIĄZANIE:

$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{4}$ więc $\sin\alpha = \cos\alpha + \frac{1}{4}$

podstawiamy do jedynki trygonometrycznej:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (\cos\alpha + \frac{1}{4})^2 + cos^2\alpha = 1$

korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{16} cos^2\alpha = 1$

Podstawiamy: $cos\alpha = x$

otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{16} = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{4} + 4 \bullet 2 \bullet \frac{15}{16} = \frac{31}{4}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}}{4}$$

liczba ujemna, nie spełnia warunków zadania, kąt miał być ostry

$$x_2 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{31}-1}{8} = \cos\alpha$$

podstawiamy do wyrażenia którego wartość mamy obliczyć:

$$\sin\alpha \bullet \cos\alpha = \cos\alpha \bullet (\cos\alpha + \frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{31}-1}{8}\left(\frac{\sqrt{31}-1}{8} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{31}-1}{8} \bullet \frac{\sqrt{31}+1}{8} = \frac{31-1}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

Odp: Wartość wyrażenia $\sin\alpha \bullet \cos\alpha$ wynosi $\frac{15}{32}$

Zadanie 5

Wyznacz punkty wspólne okręgu i prostej o równaniach:

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4 \quad$ i $\quad x + y = 10$

ROZWIĄZANIE:

Prosta i okrąg jeżeli mają punkty wspólne to spełniają ich współrzędne układ równań złożony z równania prostej i okręgu. Należy zatem rozwiązać taki układ.

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

$x + y = 10$ więc $x = 10 - y$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 4$

$(10-y)^2 - 6(10-y) + y^2 - 10y + 30 = 0$

$100 - 20y + y^2 - 60 + 6y + y^2 - 10y + 30 = 0$

$2y^2 - 24y + 70 = 0 \quad /:2$

$y^2 - 12y + 35 = 0$

$\Delta = 144 - 4 \cdot 35 = 144 - 140 = 4 \qquad \sqrt{\Delta} = 2$

$y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-2}{2} = 5 \qquad x_1 = 10 - y = 10 - 5 = 5$

$y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+2}{2} = 7 \qquad x_2 = 10 - y = 10 - 7 = 3$

Odpowiedź: Prosta I okrąg przecinają się w punktach: (5:5) I (3:7).

Zadanie 6

Dwa wielokąty wypukłe mają razem 24 boki i 117 przekątnych. Ile wierzchołków ma każdy z nich?

ROZWIĄZANIE:

Wprowadzamy oznaczenia:

a – ilość boków pierwszego wielokąta

b – ilość boków drugiego wielokąta

wzór na ilość przekątnych n-kącie $\frac{n(n-1)}{2}$

$\frac{a(a-3)}{2}$ – ilość przekątnych w pierwszym wielokącie

$\frac{b(b-3)}{2}$ – ilość przekątnych w drugim wielokącie

układamy układ równań:

$a + b = 24$

$\frac{a(a-3)}{2} + \frac{b(b-3)}{2} = 117$

przekształcamy drugie równanie i wstawiamy $a = 24 - b$

$\frac{a^2-3a}{2} + \frac{b^2-3b}{2} = 117 \ / \cdot 2$

$a^2 - 3a + b^2 - 3b = 334$

$(24-b)^2 - 3(24-b) + b^2 - 3b = 334$

$576 - 48b + b^2 - 72 + 3b + b^2 - 3b - 334 = 0$

$2b^2 - 48b + 270 = 0 \ /:2$

$b^2 - 24b = 135 = 0$

$\Delta = 576 - 540 = 36 \qquad \sqrt{\Delta} = 6$

$b_1 = \frac{24-6}{2} = 9 \qquad b_2 = \frac{24+6}{2} = 15$

$a_1 = 24 - b = 24 - 9 = 15 \qquad a_2 = 24 - b = 24 - 15 = 9$

Odpowiedź: Wielokąty mają po 9 i 15 wierzchołków.

Zadanie 7

W partii 1000 płaszczy 2% stanowią płaszcze z usterkami. Oblicz, ile co najmniej płaszczy z wadami należy usunąć, aby w pozostałych było mniej niż 1% płaszczy z wadami.

ROZWIĄZANIE:

x – ilość płaszczy, które należy usunąć

$2\% \cdot 1000 = 0{,}02 \cdot 1000 = 20$ – ilość płaszczy z wadami

$1000 - x$ – ilość wszystkich płaszczy po usunięciu

$20 - x$ – ilość płaszczy z wadami po usunięciu

układamy nierówność:

$\frac{20-x}{1000-x} \cdot 100\% < 1\%$

$\frac{20-x}{1000-x} \cdot 1 < 0{,}01 \quad / \cdot (1000-x)$

$20 - x < 10 - 0{,}01x$

$-x + 0{,}01x < 10 - 20$

$-0{,}99x < -10 \quad /(-0{,}99)$

$x > 10{,}(10)$

Odpowiedź: Należy usunąć co najmniej 11 płaszczy.

Zadanie 8

Świeży arbuz ważył 4 kg. W wyniku przechowywania ilość wody w arbuzie zmniejszyła się z 99% do 9823%. Ile obecnie waży arbuz?

ROZWIĄZANIE:

Skoro w świeżym arbuzie było 99% wody, to sucha masa stanowiła 1%. W wyniku przechowywania zmieniła się w arbuzie ilość wody, natomiast waga suczej masy pozostała bez zmian. Obliczamy wagę suchej masy:

$1\% \cdot 4 \text{ kg} = 0{,}01 \cdot 4 \text{ kg} = 0{,}04 \text{ kg}$

w arbuzie po przechowywaniu sucha masa stanowi

$100\% - 98\frac{2}{3}\% = 1\frac{1}{3}\%$

x – waga obecna arbuza

układamy równanie:

$1\frac{1}{3}\% x = 0{,}04$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{100} x = 0{,}04$

$\frac{4}{300} x = 0{,}04 / : \frac{4}{300} \qquad x = 3$

Odpowiedź: Obecnie arbuz waży 3 kg.

Zadania maturalne opracowała: Jadwiga Biedrycka, egzaminator, wykładowca Akademii Sukcesu www.as.edu.pl.