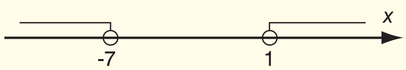
MATEMATYKA: przykładowy arkusz egzaminacyjny – poziom podstawowy

A. Zadania zamknięte

W zadaniach od 1 do 25 wybierz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1 (1 pkt)

Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej.



A. $|x-3|>4$ **B.** $|x+3|>4$
C. $|x+3|<4$ **D.** $|x-3|<4$

Zadanie 2 (1 pkt)

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o przekątnej $2\sqrt{2}$. Powierzchnia boczna tego walca wynosi:

A. 4 **B.** 2π **C.** 4π **D.** 8π

Zadanie 3 (1 pkt)

Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $y=-x^2+6x-9$ jest zbiór:

A. $(-\infty; 0\rangle$ **B.** $(-\infty; 3\rangle$
C. $\langle -9; \infty)$ **D.** $\langle 0; \infty)$

Zadanie 4 (1 pkt)

Ilość rozwiązań równania $\dfrac{x^2-4}{(x+2)(x-3)}=0$ to:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 5 (1 pkt)

Iloczyn zbioru $A=\langle -4, 3)$ i zbioru $B=\langle 2, \infty)$ wynosi:

A. $\langle -4, \infty)$ **B.** $\langle 2, 3)$
C. $\langle -4, 2\rangle$ **D.** $\langle 3, \infty)$

Zadanie 6 (1 pkt)

Liczba $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{-2}\cdot\sqrt[6]{7^{-24}}$ jest równa:

A. 7^2 **B.** 7^{-6} **C.** 7^{-2} **D.** 1

Zadanie 7 (1 pkt)

Liczba $(\sqrt{3}-2)^3$ jest równa:

A. $15\sqrt{3}-26$ **B.** $15\sqrt{3}+10$
C. $9\sqrt{3}+26$ **D.** $-9\sqrt{3}+10$

Zadanie 8 (1 pkt)

Suma miar kąta środkowego i kąta wpisanego opartego na tym samym łuku jest równa 120°. Kąt środkowy ma miarę:

A. 40° **B.** 60° **C.** 80° **D.** 100°

Zadanie 9 (1 pkt)

Pewien towar kosztuje p zł. Jego cenę najpierw obniżono o 30%, następnie zaś podwyższono o 10%. Teraz towar ten kosztuje:

A. $0{,}8p$ zł **B.** $0{,}4p$ zł **C.** $1{,}2p$ zł **D.** $0{,}77p$ zł

Zadanie 10 (1 pkt)

Rzucono trzy razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo, że reszka wypadła co najmniej jeden raz wynosi:

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{2}{8}$ **C.** $\frac{3}{8}$ **D.** $\frac{7}{8}$

Zadanie 11 (1 pkt)

Równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y=2x+1$ i przechodzącej przez punkt (2, –4) ma postać:

A. $y=2x$ **B.** $y=2x-8$
C. $y=-\frac{1}{2}x-3$ **D.** $y=\frac{1}{2}x-5$

Zadanie 12 (1 pkt)

Ile miejsc zerowych ma funkcja:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+3, & \text{dla } x\in(-\infty,-1) \\ -2x+1, & \text{dla } x\in\langle -1, 2) \\ 2x-4, & \text{dla } x\in\langle 2, \infty) \end{cases}$$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 13 (1 pkt)

Różnica miar kątów przy jednym z ramion trapezu wynosi 20°. Miara większego z nich wynosi:

A. 100° **B.** 80° **C.** 120° **D.** 110°

Zadanie 14 (1 pkt)

Punkt P(2, 4) jest środkiem odcinka AB. Wskaż współrzędne punktu B, jeśli A(–1, 3).

A. B = (3, 9) **B.** B = (5, 5)
C. B = (–5, –3) **D.** B = (1, 1)

Zadanie 15 (1 pkt)

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_4=5$ i $a_6=15$. Wtedy wyraz a_1 jest równy

A. $a_1=-10$ **B.** $a_1=-5$ **C.** $a_1=0$ **D.** $a_1=5$

Zadanie 16 (1 pkt)

Iloraz ciągu geometrycznego, w którym trzeci wyraz jest równy (–2), a piąty wyraz jest równy (–8) wynosi:

A. 2 **B.** 2 lub –2 **C.** 3 **D.** 4

Zadanie 17 (1 pkt)

Równanie okręgu o środku S = (2, –1) i stycznego do osi x ma postać:

A. $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2=4$
C. $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ **D.** $(x+2)^2+(y-1)^2=1$

Zadanie 18 (1 pkt)

Równanie prostej prostopadłej do prostej $y=-5x+2$ ma postać:

A. $y=-5x-4$ **B.** $y=5x+4$
C. $y=\frac{1}{5}x+4$ **D.** $y=-\frac{1}{5}x-4$

Zadanie 19 (1 pkt)
Punkty $A=(-2,\ 2)$ i $C=(6,\ 8)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta ABCD. Promień okręgu opisanego na tym prostokącie jest równy:

A. 32 **B.** 62 **C.** 5 **D.** 10

Zadanie 20 (1 pkt)
Zbiór wartości funkcji $y=3^{x-1}-2$ jest równy:

A. $(-2,\ \infty)$ **B.** $(2,\ \infty)$ **C.** $(1,\ \infty)$ **D.** $(-1,\ \infty)$

Zadanie 21 (1 pkt)
Liczba $2\log_2 3+\log_2 24-\log_2 27$ jest równa:

A. $\log_2 57$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** 8

Zadanie 22 (1 pkt)
Pewien graniastosłup ma 30 krawędzi. Liczba wszystkich jego ścian to:

A. 10 **B.** 12 **C.** 15 **D.** 30

Zadanie 23 (1 pkt)
Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których obie cyfry są parzyste jest:

A. 16 **B.** 20 **C.** 24 **D.** 25

Zadanie 24 (1 pkt)
W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 30°, a krótsza przyprostokątna ma długość 2. Długość przeciwprostokątnej wynosi:

A. 4 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $4\sqrt{3}$

Zadanie 25 (1 pkt)
Mediana danych: 0, 4, 2, 4, 1, 4 jest równa:

A. 2,5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

B. Zadania otwarte

Zadanie 26 (2 pkt)
Rozwiąż nierówność $x^2-2x-8>0$.

Zadanie 27 (2 pkt)
Rozwiąż równanie $x^3-3x^2+x-3=0$.

Zadanie 28 (2 pkt)
Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha=4$. Oblicz $\sin\alpha-\cos\alpha$.

Zadanie 29 (2 pkt)
Wiadomo, że $\log_5 6=d$. Oblicz $\log_6 25$.

Zadanie 30 (2 pkt)
Na boku BC trójkąta ABC wybrano punkt D tak, by kąt CAD był równy kątowi ABC. Odcinek AE jest dwusieczną kąta DAB. Udowodnij, że $|AC|=|CE|$.

Zadanie 31 (4 pkt)
W dwóch jednakowych urnach są kule, w pierwszej jest 6 białych i 4 czarne, w drugiej 8 białych i 12 czarnych. Sięgamy losowo do jednej z urn i losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

Zadanie 32 (5 pkt)
Skończony ciąg arytmetyczny ma 11 wyrazów. Pierwszy wyraz jest równy 24. Pierwszy, piąty i jedenasty wyraz tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę ciągu arytmetycznego.

Zadanie 33 (6 pkt)
Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku długości 2. Dwie ściany boczne tego ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a trzecia tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Oblicz objętość i pole powierzchni tego ostrosłupa.

Rozwiązania zadań zamkniętych

Odpowiedzi: 1-B, 2-C, 3-A, 4-B, 5-B, 6-D, 7-A, 8-C, 9-D, 10-D, 11-B, 12-C, 13-A, 14-B, 15-A, 16-B, 17-C, 18-C, 19-C, 20-A, 21-C, 22-B, 23-B, 24-A, 25-B

Rozwiązania zadań otwartych

ZADANIE 26

Obliczamy pierwiastki trójmianu $y=x^2-2x-8$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)$

$\Delta=36$

Wyrażenie Δ jest dodatnie, zatem trójmian kwadratowy ma dwa pierwiastki

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(-2)-6}{2\cdot1}$

$x_1=\dfrac{2-6}{2}$

$x_1=-2$

oraz

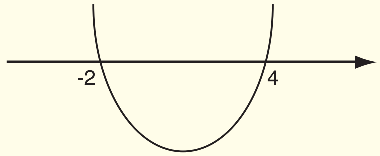
$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2=\dfrac{-(-2)+6}{2\cdot1}$

$x_2=\dfrac{2+6}{2}$

$x_2=4$

Szkicujemy wykres funkcji $y=x^2-2x-8$. Wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do góry i miejscach zerowych -2 i 4.



Odczytujemy z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie:

$x\in(-\infty;\ -2)\cup(4;\ \infty)$

Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(-\infty;\ -2)\cup(4;\ \infty)$

ZADANIE 27

Wielomian x^3-3x^2+x-3 rozkładamy na czynniki.
Grupujemy składniki i wyłączamy wspólny czynnik przed nawias

$x^2(x-3)+(x-3)=0$

Otrzymujemy wspólny czynnik $(x-3)$, który wyłączamy przed nawias.

$(x-3)(x^2+1)=0$

Wyrażenie x^2+1 nie rozkłada się.
Obliczamy jedyny pierwiastek równania:

$x-3=0$

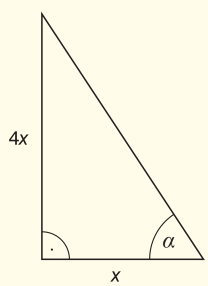
$x=3$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba 3.

ZADANIE 28

$\operatorname{tg}\alpha=4=\frac{4x}{x}$

Tangens kąta ostrego jest to stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie.
Korzystamy z trójkąta prostokątnego, w którym długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta wynosi $4x$, zaś długość przyprostokątnej leżącej przy kącie wynosi x. Przeciwprostokątna ma długość c.



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$c^2=(4x)^2+x^2$

$c^2=16x^2+x^2$

$c^2=17x^2$

$c=\sqrt{17}x$

Obliczamy wartość funkcji sinus i cosinus oraz ich różnicę:

$\sin\alpha=\frac{4x}{c}$

$\sin\alpha=\frac{4x}{\sqrt{17}x}$

$\sin\alpha=\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\cos\alpha=\frac{x}{c}$

$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{17}x}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4\sqrt{17}}{17}-\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{3\sqrt{17}}{17}$

Odpowiedź: Wyrażenie $\sin\alpha-\cos\alpha$ wynosi $\frac{3\sqrt{17}}{17}$

ZADANIE 29

Przyjmujemy, że $\log_6 25=x$
Korzystając z definicji logarytmu:

$\log_a c=b \Leftrightarrow a^b=c$

otrzymujemy:

$\log_6 25=x \Leftrightarrow 6^x=25$

oraz

$\log_5 6=d \Leftrightarrow 5^d=6$

Do równania $6^x=25$ zamiast 6 wstawiamy 5^d:

$(5^d)^x=25$

$5^{dx}=5^2$

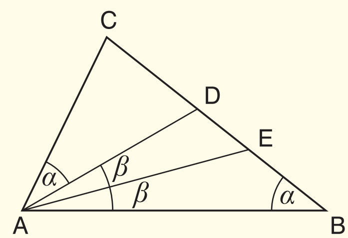
Opuszczamy podstawy, porównując same wykładniki

$dx=2$

$x=\frac{2}{d}$

Odpowiedź: $\log_6 25$ wynosi $\frac{2}{d}$

ZADANIE 30



Przyjmijmy oznaczenia: $\angle CAD=\angle ABC=\alpha$
Odcinek AE jest dwusieczną kąta DAB, zatem

$\angle DAE=\angle EAB=\beta$

Suma miar kątów w trójkącie wynosi 180°, zatem

$\angle AEB=180°-\alpha-\beta$

Kąty AEB oraz AEC są przyległe zatem

$\angle AEC=180°-\angle AEB$

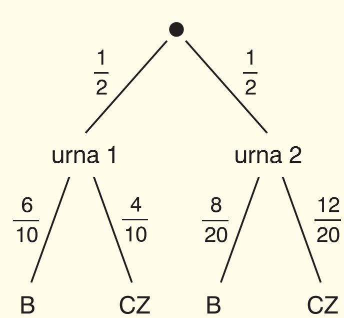
$\angle AEC=180°-(180°-\alpha-\beta)$

$\angle AEC=\alpha+\beta$

Zauważmy, że kąt CAE również wynosi $\alpha+\beta$. Zatem trójkąt ACE jest równoramienny.
Stąd AC = CE, gdyż są to ramiona w trójkącie równoramiennym.

ZADANIE 31

Przedstawiamy rozważaną sytuację, korzystając z drzewa.



- Każdą urnę wybieramy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$

- Kulę białą z urny pierwszej wybieramy z prawdopodobieństwem $\frac{6}{10}$
- Kulę czarną z urny pierwszej wybieramy z prawdopodobieństwem $\frac{4}{10}$
- Kulę białą z urny drugiej wybieramy z prawdopodobieństwem $\frac{8}{20}$
- Kulę czarną z urny drugiej wybieramy z prawdopodobieństwem $\frac{12}{20}$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia
A – wylosowano kulę białą,
jako sumę odpowiednich zdarzeń

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{20}=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej wynosi $\frac{1}{2}$

ZADANIE 32

Niech (a_n) – ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym $a_1=24$
Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot r$$

otrzymujemy

$$a_5=a_1+4r$$

$$a_5=24+4r$$

$$a_{11}=a_1+10r$$

$$a_{11}=24+10r$$

Z warunków zadania wiemy, że liczby a_1, a_5, a_{11} tworzą ciąg geometryczny.
Jeżeli ciąg jest geometryczny, to środkowy wyraz ciągu jest średnią geometryczną wyrazów skrajnych:

$$a_5^2=a_1\cdot a_{11}$$

$$(24+4r)^2=24\cdot(24+10r)$$

$$576+192r+16r^2=576+240r$$

$$16r^2-48r=0$$

W powyższym równaniu kwadratowym wyłączamy przed nawias 16r:

$$16r(r-3)=0$$

$$r=0 \quad \text{lub} \quad r=3$$

Otrzymujemy dwa ciągi arytmetyczne, jeden o różnicy równej 0, drugi o różnicy równej 3.
Obliczamy sumę jedenastu wyrazów ciągu arytmetycznego dla obu tych ciągów korzystając ze wzoru

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n$$

$$S_{11}=\frac{2\cdot 24+(11-1)\cdot 0}{2}\cdot 11=264$$

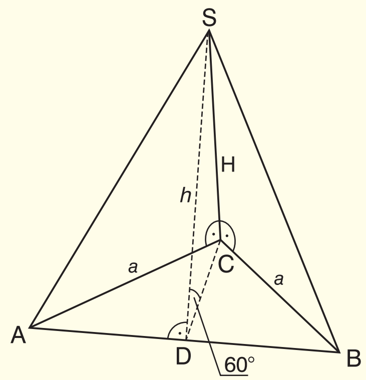
lub

$$S_{11}=\frac{2\cdot 24+(11-1)\cdot 3}{2}\cdot 11=429$$

Odpowiedź: Suma ciągu arytmetycznego wynosi 264 lub 429.

ZADANIE 33

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
W szczególności ustalamy, że ściany ACS, BCS są prostopadłe do podstawy ostrosłupa oraz $a=2$.



Odcinek CD jest wysokością podstawy, czyli trójkąta równobocznego, zatem

$$|CD|=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

Wysokość ostrosłupa H obliczamy korzystając z funkcji tangens w trójkącie DCS

$$\operatorname{tg} 60^\circ=\frac{H}{|CD|}$$

$$\sqrt{3}=\frac{H}{\sqrt{3}}$$

$$H=3$$

Wysokość h ściany bocznej ABS obliczamy korzystając z funkcji cosinus w trójkącie DCS

$$\cos 60^\circ=\frac{|CD|}{h}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{h}$$

$$h=2\sqrt{3}$$

Obliczamy pole P powierzchni ostrosłupa, jako sumę:

1. pola trójkąta równobocznego o boku a (podstawa)

$$P_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

2. pola trójkąta równoramiennego ABS o podstawie a oraz wysokości h

$$P_2=\frac{1}{2}ah$$

3. dwóch pól trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych a i H.

$$P_3=2\cdot\frac{1}{2}aH$$

$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{1}{2}aH+\frac{1}{2}ah$$

$$P=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}$$

$$P=\frac{4\sqrt{3}}{4}+6+2\sqrt{3}$$

$$P=3\sqrt{3}+6$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H=\frac{4\sqrt{3}}{12}\cdot 3=\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $\sqrt{3}$, zaś pole powierzchni ostrosłupa wynosi $3\sqrt{3}+6$

Zadania maturalne opracowała: Bożena Śliwowska,
egzaminator, nauczyciel matematyki w II LO w Augustowie