MATEMATYKA: przykładowy arkusz egzaminacyjny z matematyki – poziom rozszerzony

Zadanie 1 (6 pkt)

a) Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}-|x+1|$

b) Jak należy dobrać liczbę m, aby funkcja określona wzorem

$g(x)=\sqrt{x^2-4x+4}-|x+1|+m$

nie miała miejsc zerowych?

Zadanie 2 (3 pkt)

Oblicz wartość wyrażenia $10x^2y^2$ wiedząc, że $x+y=10$ oraz $x^3+y^3=10$.

Zadanie 3 (5 pkt)

Rozwiąż równanie

$2\sin^3 x-\sin x\cos x-\sin x=0$

Zadanie 4 (6 pkt)

Zbadaj, dla jakich m równanie

$(m-2)x^4-2(m+3)x^2+m+1=0$

ma cztery różne rozwiązania.

Zadanie 5 (5 pkt)

Cztery kolejne współczynniki wielomianu

$W(x)=x^3+bx^2+cx+d$

tworzą ciąg geometryczny. Pierwiastkiem tego wielomianu jest liczba –2. Wyznacz współczynniki tego wielomianu.

Zadanie 6 (4 pkt)

W trójkącie ABC boki BC i AC mają długości odpowiednio 4 i 2, kąt przy wierzchołku C ma miarę 120°. Oblicz długość tej części dwusiecznej kąta ACB, która jest zawarta w trójkącie ABC.

Zadanie 7 (6 pkt)

W trapezie ABCD poprowadzono przez punkt przecięcia się przekątnych prostą równoległą do podstaw i przecinającą boki nierównoległe trapezu w punktach E i F. Wykaż, że

$|EF|=\frac{2ab}{a+b}$, gdzie $|AB|=a$, i $|CD|=b$

Zadanie 8 (5 pkt)

Dany jest okrąg o równaniu

$x^2+y^2-2x-6y+5=0$

Wykaż, że styczne do tego okręgu poprowadzone przez początek układu współrzędnych są prostopadłe.

Zadanie 9 (5 pkt)

W urnie jest m kul, w tym 5 białych. Ile co najwyżej może być kul w urnie, aby przy losowaniu dwóch kul bez zwracania prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych było większe od $\frac{2}{9}$?

Zadanie 10 (5 pkt)

Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi jego podstawy o długości a. Wyznacz *cosinus* miary kąta dwuściennego utworzonego przez parę ścian bocznych.

ROZWIĄZANIA:

Zadanie 1

Korzystając ze wzoru

$\sqrt{x^2}=|x|$

otrzymujemy:

$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$

Zatem funkcja $f(x)$ ma postać

$f(x)=|x-2|-|x+1|$

Zdefiniujemy występujące we wzorze funkcji wartości bezwzględne:

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{dla } x-2\geq 0, \quad x\geq 2 \\ -x+2, & \text{dla } x-2<0, \quad x<2 \end{cases}$$

$$|x+1|=\begin{cases} x+1, & \text{dla } x+1\geq 0, \quad x\geq -1 \\ -x-1, & \text{dla } x+1<0, \quad x<-1 \end{cases}$$

Wyznaczamy wzór funkcji kolejno w przedziałach:

$(-\infty,\ -1),\ \langle -1,\ 2),\ \langle 2,\ +\infty)$

I.

$x\in(-\infty,\ -1)$

$f(x)=-x+2+x+1=3$

II.

$x\in\langle -1,\ 2)$

$f(x)=-x+2-x-1=-2x+1$

III.

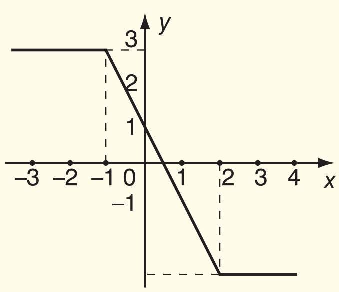
$x\in\langle 2,\ +\infty)$

$f(x)=x-2-x-1=-3$

Zapiszmy wzór funkcji bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

$$f(x)=\begin{cases} 3, & \text{dla } x\in(-\infty,-1) \\ -2x+1, & \text{dla } x\in\langle -1,2) \\ -3, & \text{dla } x\in\langle 2,+\infty) \end{cases}$$

Sporządzamy wykres funkcji:



Aby funkcja

$g(x)=\sqrt{x^2-4x+4}-|x+1|+m$

nie miała miejsc zerowych, równanie

$\sqrt{x^2-4x+4}-|x+1|+m=0$

nie może mieć rozwiązań.
Przekształcając otrzymujemy:

$\sqrt{x^2-4x+4}-|x+1|=-m$

Z wykresu odczytujemy, że równanie $f(x)=-m$ nie ma rozwiązań, gdy $m\in(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty)$

Odpowiedź:
Dla $m\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ funkcja $g(x)$ nie ma miejsc zerowych.

Zadanie 2

Wyrażenie $x+y=10$ podnosimy obustronnie do potęgi 3

$(x+y)^3=1000$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia i otrzymujemy:

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=1000$

Grupujemy wyrażenia:

$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=1000$
$x^3+y^3+3xy\,(x+y)=1000$

Korzystając z założeń, że $x+y=10$ oraz $x^3+y^3=10$, otrzymujemy

$10+3xy\cdot 10=1000$
$30xy=990$
$xy=33$

Obliczamy wartość wyrażenia $10x^2y^2=10(xy)^2=10\cdot 33^2=10890$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia $10x^2y^2$ wynosi 10890

Zadanie 3

Wyłączamy $\sin x$ przed nawias:
$\sin x(2\sin^2 x-\cos x-1)=0$

$\sin x=0$ lub $2\sin^2 x-\cos x-1=0$
$x=k\pi$, gdzie $k\in C$
Rozwiązujemy drugie równanie, korzystamy ze wzoru:
$\sin^2 x=1-\cos^2 x$
i otrzymujemy

$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0$

$2-2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$-2\cos^2 x-\cos x+1=0$

Wstawiamy zmiennią pomocniczą $\cos x=t$
i rozwiązujemy równanie kwadratowe

$-2t^2-t+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1+8=9$

$t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+3}{-4}=\frac{4}{-4}=-1$

$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-3}{-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

$\cos x=-1$ lub $\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\pi+2k\pi$ $\qquad \cos x=\cos\frac{\pi}{3}$

$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Odpowiedź:
Rozwiązaniami równania są liczby:

$x=k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie $k\in C$

Zadanie 4

Wstawiamy zmienną pomocniczą $t=x^2$, gdzie $t>0$

$(m-2)t^2-2(m+3)t+m+1=0$

Aby równanie

$(m-2)x^4-2(m+3)x^2+m+1=0$

miało cztery rożne rozwiązania, to równanie

$(m-2)t^2-2(m+3)t+m+1=0$

musi mieć dwa różne rozwiązania dodatnie.
Zatem muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} 1^\circ & a\neq 0 \\ 2^\circ & \Delta>0 \\ 3^\circ & x_1+x_2>0 \\ 4^\circ & x_1\cdot x_2>0 \end{cases}$$

1° $a\neq 0\Rightarrow m-2\neq 0\Rightarrow m\neq 2$

2° $\Delta=b^2-4ac=(-2(m+3))^2-4(m-2)(m+1)=4m^2+24m+36-4m^2-4m+8m+8=28m+44$

$28m+44>0$

$28m>-44$

$m>-\frac{11}{7}$

3° $x_1+x_2>0$

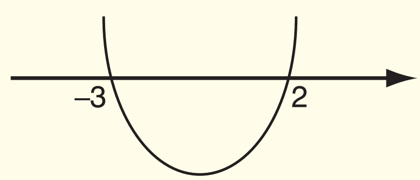
Korzystamy ze wzoru Viete'a: $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$

$\frac{-b}{a}>0$

$\frac{2(m+3)}{m-2}>0$

$2(m+3)(m-2)>0$

$m=-3$ *lub* $m=2$



Zatem $m\in(-\infty,\ -3)\cup(2,\ +\infty)$

4° $x_1\cdot x_2>0$

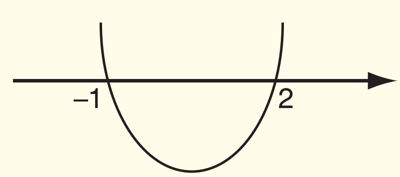
Korzystamy ze wzoru Viete'a: $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

$\frac{c}{a}>0$

$\frac{m+1}{m-2}>0$

$(m+1)(m-2)>0$

$m=-1$ lub $m=2$



Zatem $m \in (-\infty,\ -1) \cup (2,\ +\infty)$
Wyznaczamy część wspólną wszystkich czterech warunków:
$m \in (2,\ +\infty)$

Odpowiedź:
Podane równanie ma cztery różne rozwiązania dla $m \in (2,\ +\infty)$

Zadanie 5

Liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, zatem

$W(-2) = 0$

$(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = 0$

$-8 + 4b - 2c + d = 0 \quad (*)$

Z treści zadania wynika, że liczby $(1, b, c, d)$ tworzą ciąg geometryczny, zatem korzystając ze wzoru na wyraz ogólny ciągu geometrycznego $a_n = a_1 q^{n-1}$ otrzymujemy:

$a_1 = 1$

$b = a_2 = a_1 q = q$

$c = a_3 = a_1 q^2 = q^2$

$d = a_4 = a_1 q^3 = q^3$

Wstawiając do równania (*) otrzymujemy:

$-8 + 4q - 2q^2 + q^3 = 0$

Porządkujemy i otrzymujemy:

$q^3 - 2q^2 + 4q - 8 = 0$

Grupujemy składniki i wyłączamy wspólny czynnik przed nawias

$q^2(q-2) + 4(q-2) = 0$

Otrzymujemy wspólny czynnik $(q-2)$, który znów wyłączamy przed nawias.

$(q-2)(q^2+4) = 0$

Wyrażenie $q^2 + 4$ nie rozkłada się, zatem jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba $q = 2$
Obliczamy współczynniki wielomianu

$b = 2$

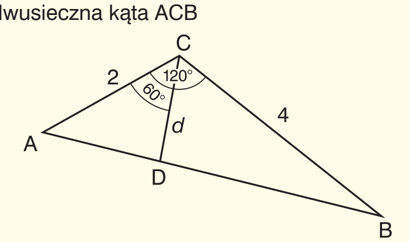
$c = 4$

$d = 8$

Odpowiedź:
Współczynniki wielomianu wynoszą: $b = 2$, $c = 4$, $d = 8$.

Zadanie 6

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
CD – dwusieczna kąta ACB



Między polami trójkątów ABC, ACD, BCD zachodzi związek:

$P_{ABC} = P_{ACD} + P_{BCD}$

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta

$P = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$

otrzymujemy:

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot d \sin 60°$

$4 \sin 120° = 3 \cdot d \sin 60°$

$d = \frac{4 \sin 120°}{3 \cdot \sin 60°}$

Korzystając ze wzorów redukcyjnych obliczamy

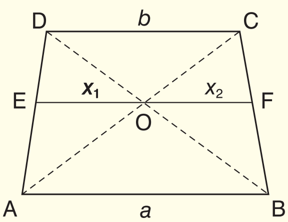
$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60°$

$d = \frac{4 \sin 60°}{3 \cdot \sin 60°} = \frac{4}{3}$

Odpowiedź:
Długość tej części dwusiecznej kąta ACB, która jest zawarta w trójkącie ABC wynosi $\frac{4}{3}$

Zadanie 7

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku,
$|EO| = x_1$, $|OF| = x_2$



Zauważmy, że trójkąty AEO i ADC są podobne, więc

$\frac{x_1}{b} = \frac{|AE|}{|AE| + |ED|}$

Podobne są również trójkąty EDO i ADB, więc

$\frac{x_1}{a} = \frac{|ED|}{|AE| + |ED|}$

Dodając stronami otrzymane równości mamy:

$\frac{x_1}{b} + \frac{x_1}{a} = \frac{|AE| + |ED|}{|AE| + |ED|}$

$\frac{x_1}{b} + \frac{x_1}{a} = 1$

$\frac{x_1 a + x_1 b}{ab} = 1$

$\frac{x_1(a+b)}{ab} = 1$

$x_1 = \frac{ab}{a+b}$

Rozważając trójkąty podobne BFO i BCD oraz trójkąty FCO i BCA i rozumując analogicznie, otrzymujemy

$x_2 = \frac{ab}{a+b}$

Obliczamy długość odcinka EF:

$|EF| = x_1 + x_2 = \frac{2ab}{a+b}$

Zadanie 8

Przez punkt będący początkiem układu współrzędnych prowadzimy pęk prostych:

$y = mx$, gdzie $m \in R$

Układamy i rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y+5=0 \\ y=mx \end{cases}$$

Stosując metodę podstawiania otrzymujemy równanie kwadratowe:

$x^2+m^2x^2-2x-6mx+5=0$

$x^2(1+m^2)-x(2+6m)+5=0$

Prosta ma być styczna do okręgu, zatem powyższe równanie ma mieć jedno rozwiązanie.
Ponieważ dla każdego $m\in R$ wyrażenie $(1+m^2)$ jest dodatnie, więc musi być spełniony warunek: $\Delta=0$

$\Delta=b^2-4ac=(2+6m)^2-20(1+m^2)=4+24m+36m^2-20-20m^2=16m^2+24m-16$

$16m^2+24m-16=0 \quad / :8$

$2m^2+3m-2=0$

$\Delta_m=9+16=25$

$m_1=-2 \quad \text{lub} \quad m_2=\frac{1}{2}$

Zatem równaniami stycznych są: $y=-2x$ i $y=\frac{1}{2}x$

Proste o współczynnikach kierunkowych a_1 i a_2 są prostopadłe, jeśli jest spełniony warunek $a_1 \cdot a_2=-1$.

Ponieważ $-2\cdot\frac{1}{2}=-1$, więc styczne te są prostopadłe.

Zadanie 9

Określamy liczbę elementów przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω: są to dwuelementowe kombinacje zbioru m-elementowego.

$$\overline{\overline{\Omega}}=\binom{m}{2}=\frac{m!}{2!(m-2)!}=\frac{(m-2)!(m-1)m}{2(m-2)!}=\frac{(m-1)m}{2}$$

Niech A – zdarzenie, że wylosowano dwie kule białe.
Określamy liczbę elementów sprzyjających zdarzeniu A: są to dwuelementowe kombinacje zbioru 5-elementowego.

$$\overline{\overline{A}}=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}=\frac{3!\cdot4\cdot5}{2\cdot3!}=\frac{20}{2}=10$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

$$P(A)=\frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}=\frac{10}{\frac{(m-1)m}{2}}=\frac{20}{(m-1)m}$$

Z warunków zadania wiemy, że $P(A)>\frac{2}{9}$, zatem

$\frac{20}{(m-1)m}>\frac{2}{9}$

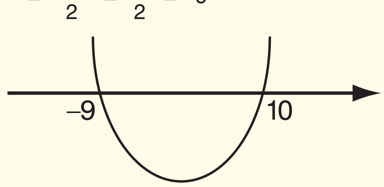
$90>m^2-m$

$m^2-m-90<0$

$\Delta=b^2-4ac=1+360=361$

$m_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+19}{2}=\frac{20}{2}=10$

$m_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-19}{2}=\frac{-18}{2}=-9$



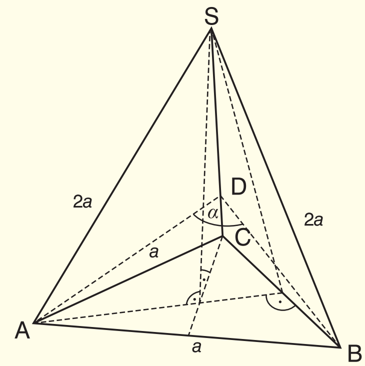
Zatem $m\in(-9;\,10)$ i m jest liczbą naturalną nie mniejszą niż 5, zatem w urnie może być co najwyżej 9 kul.

Odpowiedź:
W urnie może być co najwyżej 9 kul.

Zadanie 10

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

a – krawędź podstawy
$2a$ – krawędź boczna
h – wysokość ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka S



Obliczamy długość wysokości h:

$h^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=(2a)^2$

$h^2=4a^2-\frac{1}{4}a^2$

$h^2=\frac{15}{4}a^2$

$h=\frac{\sqrt{15}}{2}a$

Odcinek AD jest wysokością trójkąta ACS, zatem porównując dwa wzory na pole trójkąta otrzymujemy:

$\frac{1}{2}\cdot2a\cdot|AD|=\frac{1}{2}a\cdot h$

$|AD|=\frac{1}{2}h$

$|AD|=\frac{\sqrt{15}}{4}a$

Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta ABD otrzymujemy:

$a^2=|AD|^2+|AD|^2-2|AD|\cdot|AD|\cdot\cos\alpha$

$a^2=2|AD|^2-2|AD|^2\cdot\cos\alpha$

$a^2=2\left(\frac{\sqrt{15}}{4}a\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{15}}{4}a\right)^2\cos\alpha$

$\frac{15}{8}a^2\cos\alpha=\frac{15}{8}a^2-a^2$

$\frac{15}{8}a^2\cos\alpha=\frac{7}{8}a^2$

$\cos\alpha=\frac{7}{15}$

Odpowiedź:
Cosinus miary kąta dwuściennego utworzonego przez parę ścian bocznych wynosi $\frac{7}{15}$.

Zadania maturalne opracowała: Bożena Śliwowska, egzaminator, nauczyciel matematyki w II LO w Augustowie